Tartalomjegyzék

1. Monotonitás, korlátosság

1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az a_n sorozat*

- monoton növő, *ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.*
- monoton csökkenő, *ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.*
- alulról korlátos, *ha létezik $c_1 \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq c_1$.*
- felülről korlátos, *ha létezik $c_2 \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq c_2$.*

1. Feladat: Monotonak-e, illetve alulról és/vagy felülről korlátosak-e az alábbi sorozatok?

(a) $a_n = \frac{2n+1}{3n-2}$

(b) $b_n = \frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+1}$

(c) $c_n = \frac{n}{n^2+1}$

Megoldás:

(a)

- *Monotonitás:* Vizsgáljuk meg az első pár elemet: $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{5}{4}$, $a_3 = 1$, ebből azt sejthetjük, hogy a sorozatunk esetleg monoton csökkenő. Ellenőrizzük:

$$\begin{array}{lcll} a_n & \geq & a_{n+1} & \\ \frac{2n+1}{3n-2} & \geq & \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)-2} = \frac{2n+3}{3n+1} & \backslash \cdot (3n-2)\cdot(3n+1) \\ (2n+1)(3n+1) & \geq & (3n-2)(2n+3) & \\ 6n^2+5n+1 & \geq & 6n^2+5n-6 & \backslash - n^2 - 5n \\ 1 & \geq & -6. & \end{array}$$

  Eszerint $a_n \geq a_{n+1}$, vagyis a sorozat tényleg monton csökkenő.

- *Korlátosság,*
  - *alulról:* Mivel a számláló és a nevező is minden n-re pozitív, így a_n is pozitív, tehát a 0 alsó korlát.
  - *felülről:* A sorozat monoton csökkenő, tehát felső határa a sorozat első eleme, $a_1 = 3$.

(b)

- *Monotonitás:* Vizsgáljuk meg az első pár elemet: $b_1 = 0$, $b_2 = \frac{5}{9}$, $b_3 = \frac{8}{19}$. Mivel $b_1 < b_2$ és $b_2 > b_3$ sorozatunk nem lehet monoton.
- *Korlátosság,*
  - *alulról:* Mivel a számláló minden n-re nem negatív, a nevező minden n-re pozitív, így a_n is nem negtív, tehát a 0 alsó korlát.
  - *felülről:* $n^2 + (-1)^n \leq n^2 + 1$ minden n-re, $2^n_n + 1 \geq n^2 + 1$ tehát $\frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+1} \leq 1$.

(c)

- *Monotonitás:* Vizsgáljuk meg az első pár elemet: $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{2}{5}$, $c_3 = \frac{3}{10}$, ebből azt sejthetjük, hogy a sorozatunk esetleg monoton csökkenő. Ellenőrizzük:

$$\begin{array}{lcll}
c_{n+1} & \leq & c_n & \\
\dfrac{n}{n^2+1} & \leq & \dfrac{n+1}{(n+1)^2+1} = \dfrac{n+1}{n^2+2n+2} & \backslash \cdot (n^2+1)\cdot(n^2+2n+2) \\
n^3+n+n^2+1 & \leq & n^3+2n^2+2n & \backslash -n^3-n^2-n \\
1 & \leq & n^2+n. &
\end{array}$$

  Eszerint $c_n \geq c_{n+1}$, vagyis a sorozat tényleg monton csökkenő.

- *Korlátosság,*
  - *alulról:* Mivel a számláló és a nevező is minden n-re pozitív, így c_n is pozitív, tehát a 0 alsó korlát.
  - *felülről:* A sorozat monoton csökkenő, tehát felső határa a sorozat első eleme, $c_1 = 0.5$.

2. Határértékszámítás

2.1. Definíció. *Az a_n sorozat határértéke A, ha minden $\varepsilon > 0$ létezik olyan N_0 küszöbindex, hogy minden $n \geq N_0$ teljesül, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$. Jelölés:* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *vagy* $a_n \xrightarrow{n\to\infty} A$.

Emlékeztető:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$;
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$;
3. Ha $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$;
4. Ha $k > 0$, és minden n-re $a_n > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = (\lim_{n\to\infty} a_n)^k$;
5. Ha $|q| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$;
6. Ha $k > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

2. Feladat: Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $a_n = \frac{2n+1}{3n-2}$
(b) $b_n = \frac{4n^2+5n+3}{7n^2-8n+9}$
(c) $c_n = \frac{\sqrt{n^2+6}}{2n+9}$
(d) $d_n = \frac{4^n+3^n}{4^{n+2}+2^n}$

Megoldás:

(a) Sejtés: a számláló és a nevező is n elsőfokú polinomja, ebből arra következtethetünk, hogy a határérték az elsőfokú tagok hányadosa lesz, vagyis $\frac{2}{3}$. Ezt igazolhatjuk, úgy hogy a számlálót és a nevezőt is leosztjuk n-nel ($n > 0$), majd felhasználjuk az emlékeztetőből 1-et, 2-t, 3-t és 6-ot.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}.$$

(b) Hasonlóan, 1, 2, 3 és 6 szerint:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n+3}{7n^2-8n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{7-\frac{8}{n}+\frac{9}{n^2}} = \frac{4+0+0}{7-0+0} = \frac{4}{7}.$$

(c) Hasonlóan 1, 2, 3, 4, 6 szerint:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+6}}{2n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2(1+\frac{6}{n^2})}}{2n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{6}{n^2}}}{2+\frac{9}{n}} = \frac{\sqrt{1+0}}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

(d) Hasonlóan 1, 3, 5 alapján:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n}{4^{n+2}+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n}\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{16+\left(\frac{2}{4}\right)^n} = \frac{\sqrt{1+0}}{16+0} = \frac{1}{16}.$$

3. Küszöbindex kutatás

3. Feladat: Számítsuk ki az alábbi sorozatok esetén az adott ε-hoz tartozó N_0 küszöbindex értékét:

(a) $a_n = \frac{3n+1}{4n-1}$, $\varepsilon = 0.01$

(b) $b_n = \frac{2n^2-3}{4n^2+n}$

Megoldás:

(a) Keressük azt az N_0 számot, amelyre teljesül, hogy minden $n \geq N_0$ esetén $|a_n - \lim_{n\to\infty} a_n| < \varepsilon$. A korábbiakhoz hasonlóan látható, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$. Vagyis meg kell vizsgálnunk, hogy milyen n-ekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$\begin{array}{rcccl}
 & & \left|\dfrac{3n+1}{4n-1} - \dfrac{3}{4}\right| & < & \varepsilon = \dfrac{1}{100} \\
-\dfrac{1}{100} & < & \dfrac{3n+1}{4n-1} - \dfrac{3}{4} & < & \dfrac{1}{100} \\
\dfrac{74}{100} & < & \dfrac{3n+1}{4n-1} & < & \dfrac{76}{100} \qquad \backslash \cdot (4n-1),\ -1 \\
\dfrac{74}{25}n - \dfrac{174}{100} & \underset{(*)}{<} & 3n & \underset{(**)}{<} & \dfrac{76}{25}n - \dfrac{176}{100}.
\end{array}$$

$(*)$: A baloldali $\left(\frac{74}{25}n - \frac{174}{100} < 3n\right)$ egyenlőtlenség teljesül, ha $n > -\frac{174}{4}$, vagys mindig.
$(**)$: A jobboldali $\left(3n < \frac{76}{25}n - \frac{176}{100} <\right)$ pedig, ha $n > \frac{176}{4} = 44$. Vagyis ahhoz, hogy mindkét egyenlőtlenség teljesüljön N_0-t 45-nek kell választanunk.

(b) Hasonlóan:

$$\begin{array}{rcccl}
 & & \left|\dfrac{2n^2-3}{4n^2+n} - \dfrac{1}{2}\right| & < & \varepsilon = \dfrac{1}{1000} \\
-\dfrac{1}{1000} & < & \dfrac{2n^2-3}{4n^2+n} - \dfrac{1}{2} & < & \dfrac{1}{1000} \qquad \backslash + \dfrac{1}{2} \\
\dfrac{499}{1000} & < & \dfrac{2n^2-3}{4n^2+n} & < & \dfrac{501}{1000} \qquad \backslash \cdot (4n^2+n) \\
\dfrac{499}{250}n^2 + \dfrac{499}{1000}n & \underset{(*)}{<} & 2n^2 - 3 & \underset{(*)}{<} & \dfrac{501}{250}n^2 + \dfrac{501}{1000}n
\end{array}$$

$(*)$: $0 < 2n^2 - \frac{499}{250}n^2 - \frac{499}{1000}n - 3 = \frac{1}{250}n^2 - \frac{499}{1000} - 3$, mely teljesül, hogyha $n \lessapprox -5.7$ vagy $n \gtrapprox 130.4$.
$(**)$: $2n^2 - \frac{501}{250}n^2 - \frac{501}{1000}n - 3 < 0$, mely teljesül, hogyha $n \lessapprox -118.9$ vagy $n \gtrapprox -6.3$.
Eszerint n-nek nagyobbnak kell lennie, mint 130.4 vagyis $N_0 = 131$.

4. Erősorrend, polinom n-edik gyöke

Emlékeztető:

1. $\log n \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll n! \ll n^n$, ahol $a_n \ll b_n$, hogyha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ (vagyis, minél előrébb van egy sorozat a listában, annál lassabban tart a végtelenhez, ahogy az n tart a végtelenhez, tehát *hogyha elosztjuk egy a listában hátrébb levő sorozattal a hányados a 0-ba tart.*)

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_k n^k + c_{k-1}n^{k-1} \ldots c_1 n + c_0} = 1$ (vagyis az n egy polinomjának n-edik gyöke az 1-hez tart, ahogy az n tart a végtelenbe.)

4. Feladat: Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $a_n = \frac{4^{2n}+3^n}{n!}$

(b) $b_n = \sqrt[n]{2n^2+5n+3} + \frac{7^n+n}{n^n}$

(c) $c_n = \frac{n^8+\log n}{2^n}$

Megoldás:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{2n}+3^n}{n!} \lim_{n\to\infty} \frac{4^{2n}}{n!} + \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{16^n}{n!} + \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0+0 \tag{4.1}$$

Az utolsó egyenlőség abból következik, hogy az erősorrend alapján $16^n \ll n!$ és $3^n \ll n!$.

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2+5n+3} + \frac{7^n+n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2+5n+3} + \lim_{n\to\infty} \frac{7^n+n}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2+5n+3} + \lim_{n\to\infty} \frac{7^n}{n^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^n} = 1+0+0\end{aligned} \tag{4.2}$$

Az utolsó egyenlőségben felhasználtuk, hogy az n egy polinomjának n-edik gyöke az 1-hez tart, ill., hogy $7^n \ll n^n$, $n \ll n^n$.

(c) Hasonlóan a korábbiakhoz, mivel $n^8 \ll 2^n$ és $\log n \ll 2^n$:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^8+\log n}{2^n} = 0 \tag{4.3}$$

5. Az e hatványaihoz tartó sorozatok

Emlékeztető:

Ha az $a_n$és $b_n$sorozatokra teljesül, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, illetve $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = c$, akkor $\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = \mathrm{e}^c$.

5. Feladat: Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $d_n = \left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{3n+5}$

(b) $e_n = \left(\frac{3n+4}{3n+8}\right)^{9n+7}$

(c) $f_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{\sqrt{9n^2-7n+3}}$

(d) $g_n = \left(\frac{4^n}{4^n+2^n+1}\right)^{2^{n+1}+n^2}$

Megoldás:

(a)

Az $\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{3n+5}$ sorozat éppen $(1+a_n)^{b_n}$ alakú, ahol $a_n = \frac{4}{2n-3}$ és $b_n = 3n+5$, tehát az emlékeztetőben írottak alapján a

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot(3n+5)}{2n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n+20}{2n-3}$$

határértéket kell kiszámolnunk.

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{12n+20}{2n-3} = \frac{12+\frac{20}{n}}{2-\frac{3}{n}} = 6.$$

Így, az emlékeztető alapján

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{3n+5} = \mathrm{e}^6.$$

(b) Az $e_n = \left(\frac{3n+4}{3n+8}\right)^{9n+7}$ sorozat nem $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n}$ alakú, de látható, hogy az alap, $\left(\frac{3n+4}{3n+8}\right)$ az 1-hez, míg a kitevő $9n+7$ a végtelenbe tart, ahogy $n\to\infty$. Így használhatjuk az emlékeztetőben kimondott tételt. Könnyen látszik, hogy a kitevőben szereplő kifejezés $9n+7 = b_n$. Az alapban lévő $\left(\frac{3n+4}{3n+8}\right)$ kifejezést $(1+a_n)$ alakra kell hoznunk. Vagyis

$$\begin{aligned} 1+a_n &= \frac{3n+4}{3n+8} \qquad \backslash -1 \\ a_n &= \frac{3n+4}{3n+8} - 1 = \frac{3n+4-3n-8}{3n+8} = \frac{-4}{3n+8}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Tehát

$$e_n = (1+a_n)^{b_n} = \left(1+\frac{-4}{3n+8}\right)^{9n+7}. \tag{5.2}$$

Az előzőhöz hasonlóan ki kell számolnunk a

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-4\cdot(9n+7)}{3n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{-36n-21}{3n+8}$$

határértéket.

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{-36n-21}{3n+8} = \frac{-36}{3} = -12.$$

Így, az emlékeztető alapján

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-4}{3n+8}\right)^{9n+7} = \mathrm{e}^{-12}.$$

(c) A (b)-hez hasonlóan az alap megint nem $1 + a_n$ alakú, de az alapra teljesül, hogy $\frac{n+1}{n+3} \to 1$ és a kitevőben szereplő b_n-re: $\sqrt{9n^2 - 7n + 3} \to \infty$, vagyis használhatjuk az emlékeztetőbeli tételt. Megint az a_n meghatározásával, vagyis az alap, $\frac{n+1}{n+3}$ $(1 + a_n)$ alakra hozásával kezdjük.

$$a_n = \frac{n+1}{n+3} - 1 = \frac{-2}{n+3}. \tag{5.3}$$

Ezután kiszámoljuk az $a_n \cdot b_n$ határértéket (hasonló határérték volt a 2. Feladat (c) részében):

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{-2\sqrt{9n^2 - 7n + 3}}{n+3} = -6. \tag{5.4}$$

Vagyis

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \mathrm{e}^{-6} \tag{5.5}$$

(d)

$g_n = \left(\frac{4^n}{4^n+2^n+1}\right)^{2^{n+1}+n^2}$

- 1. lépés: Használhatjuk az az emlékeztetőbeli tételt? *Igen*, mert:

$$\begin{aligned} &\text{az alap:} \quad \frac{4^n}{4^n+2^n+1} \to 1 \\ &\text{a kitevő:} \quad 2^{n+1} + n^2 \to \infty. \end{aligned} \tag{5.6}$$

- 2. lépés: Az alap megfelelő $1 + a_n$ alakra hozása.

$$a_n = \frac{4^n}{4^n+2^n+1} - 1 = \frac{-2^n - 1}{4^n+2^n+1} \tag{5.7}$$

- 3.lépés: Az $a_n \cdot b_n$ sorozat határértékének kiszámítása:

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1}+n^2)(-2^n-1)}{4^n+2^n+1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{2\cdot 4^n + 2\cdot 2^n + n^2\cdot 2^n + n^2}{4^n+2^n+1} = -2 \tag{5.8}$$

- 4. lépés: Egyesítjük az információkat.

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \mathrm{e}^{-2} \tag{5.9}$$

6. Gyökös kifejezések különbsége

6. Feladat: Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $a_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}$

(b) $b_n = \sqrt{n^2+5n+1} - n$

Megoldás:

(a)
A gond, hogy a sorozat két olyan kifejezés különbsége, amelyek a végtelenbe tartanak. Szeretnénk eltüntetni a gyökös kifejezést, ezért *beszorzunk a konjugálttal*.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-n^2-n}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}})} = \frac{2}{1+1} = 1
\end{aligned} \tag{6.1}$$

(b)
Hasonlóan:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+5n+1} - n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+5n+1} - n)(\sqrt{n^2+5n+1} + n)}{\sqrt{n^2+5n+1} + n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n+1-n^2}{\sqrt{n^2+5n+1} + n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5+1}{n(\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} + 1)} = \frac{5}{1} = 5
\end{aligned} \tag{6.2}$$