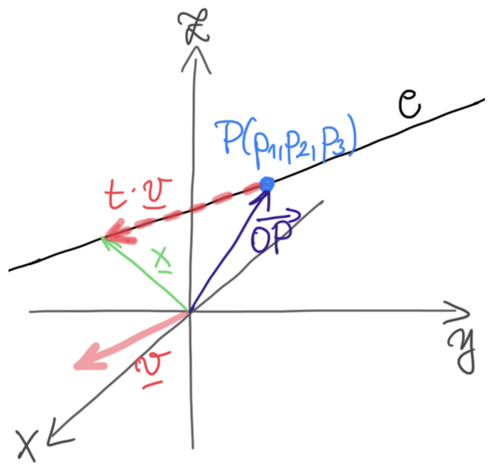
Tartalomjegyzék

1. Egyenesek

A $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ irányvektorú $P(p_1, p_2, p_3)$ ponton átmenő egyenes tartalmazza az $\underline{x}$ vektor végpontját, ha $\underline{x} - \vec{OP} = t \cdot \underline{v}$ valamely $t \in \mathbb{R}$ paraméterre (1. ábra). Ezek szerint az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x_1 = p_1 + t \cdot v_1$$
$$x_2 = p_2 + t \cdot v_2$$
$$x_3 = p_3 + t \cdot v_3$$



1. ábra. Az egyenes.

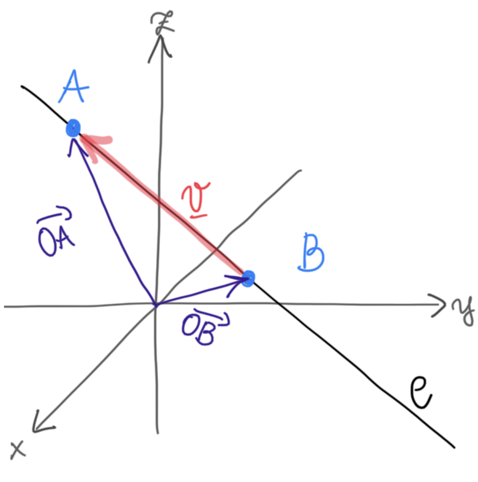
1. Feladat: (a) Adjuk meg az $A(1, 4, 0)$ és a $B(2, 2, 5)$ pontokon átmenő e egyenes paraméteres egyenletrendszerét.

(b) Adjuk meg az $A(0, 3, 5)$ ponton átmenő $\underline{u} = (7, 2, 3)$ vektorral párhuzamos f egyenes paraméteres egynletrendszerét.

Megoldás:

(a)
Az egyenes egy pontja például $A(1, 4, 0)$, az irányvektora $\underline{v} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (1, -2, 5)$. Így az e egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x_1 = 1 + t \cdot 1$$
$$x_2 = 4 + t \cdot -2$$
$$x_3 = 0 + t \cdot 5.$$



2. ábra. Egyenes két pontja.

(b)
Az egyenes egy pontja $A(0, 3, 5)$, egy irányvektora pedig, mivel az egyenes párhuzamos az $\underline{u}$ vektorral maga $\underline{u} = (7, 2, 3)$. Így az e egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + t \cdot 7 \\ x_2 &= 3 + t \cdot 2 \\ x_3 &= 5 + t \cdot 3. \end{aligned} \tag{1.1}$$

2. Síkok

Egy S síkot megadhatunk egy pontjával $P(p_1, p_2, p_3)$ és a rá merőleges vektorok irányával (egy $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ normálvektorral). Ekkor az $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektor végpontja benne van a síkban, akkor és csak akkor, hogyha az $\underline{x} - \vec{OP} \perp \underline{n}$. Jelöljük az $\underline{x} - \vec{OP}$ vektort $\underline{w}$-vel. $\underline{w} \perp \underline{n}$ akkor és csak akkor, ha $\underline{w}\,\underline{n} = 0$, vagyis, ha $(x_1 - p_1)n_1 + (x_2 - p_2)n_3 + (x_3 - p_3)n_3 = 0$, vagyis $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$.

2. Feladat: (a) Adjuk meg az $A(0, -7, 0)$ ponton átmenő $x + 2y + 2z = 13$ egyenletű S síkra merőleges e egyenes paraméteres egyenletrendszerét.

(b) Adjuk meg az $A(-2, 0, 3)$, $B(5, 1, 0)$ és $C(2, 3, 1)$ pontokat tartalmazó S sík egyenletét.

Megoldás:

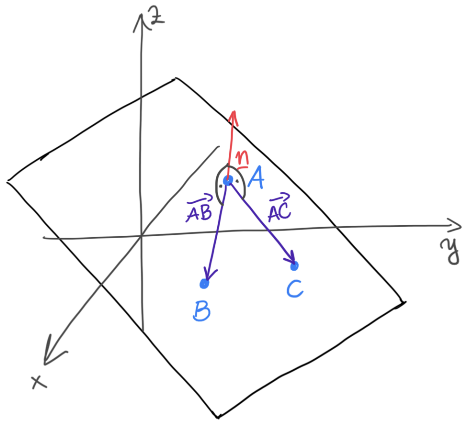
(a) Lásd 2. ábra. Mivel az e egyenes merőleges az S síkra ezért az irányvektora a sík normálvektora lesz, ami $\underline{n} = (1, 2, 2)$. Az egyenes egy pontja $A(0, -7, 0)$. Így az e egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x_1 = 0 + t$$
$$x_2 = -7 + t \cdot 2$$
$$x_3 = 0 + t \cdot 2.$$

(b) Lásd 3. ábra. A sík két (nem párhuzamos) vektora $\vec{AB} = (7, 1, -3)$ és $\vec{AC} = (4, 3, -2)$. A sík egy normálvektora merőleges ezekre, tehát a normálvektort megkaphatjuk, mint $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-11, 2, 17)$. A sík egy pontja $A(-2, 0, 3)$, így az egyenes egyenlete: $(x + 2)(-11) + (y + 0)2 + (z - 3)17 = 0$, vagyis $-11x + 2y + 17z = 73$.

3. Feladat (Két sík hajlásszöge): Adjuk meg az $S_1 : x + y = 9$ és az $S_2 : 2x + y - 17z = 4$ síkok hajlásszögét.

Megoldás:



3. ábra. Sík egyenlete annak három pontjából.

Lásd 4. ábra. Keressük azon $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorok közrezárt α szögét, amelyekre teljesül, hogy

- $\underline{v}_1$ rajta van az S_1 és $\underline{v}_2$ rajta van az S_2 síkon,
- a két vektor merőleges a két sík metszeteként előálló egyenesre.

Az első pontból következik, hogy $\underline{v}_1 \perp \underline{n}_1$ és $\underline{v}_2 \perp \underline{n}_2$, a másodikból pedig, hogy $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ az $\underline{n}_1$ és $\underline{n}_2$ síkjában van. Ezekből következik, hogy a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ által bezárt szög megegyezik az $\underline{n}_1$ és $\underline{n}_2$ által bezárt szöggel.
Az $\underline{n}_1$ és $\underline{n}_2$ által bezárt α szöget megállapíthatjuk például a skaláris szorzatuk segítségével a következő módon:

$$\cos(\alpha) = \frac{\underline{n}_1 \underline{n}_2}{|\underline{n}_1||\underline{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (2.1)$$

Ebből kapjuk, hogy a két sík által bezárt α szög $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

4. Feladat (Pont és sík távolsága): Adjuk meg a $P(0, -1, 0)$ pont és a $2x + y + 2z = 4$ egyenletű S sík távolságát.

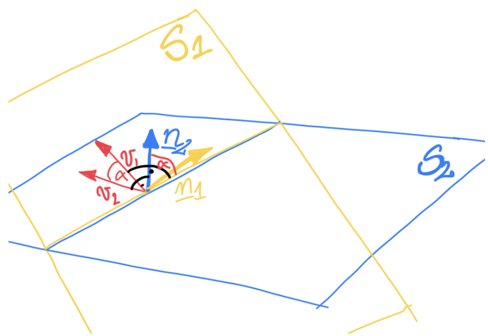
Megoldás:

Lásd 5. ábra. Az S sík és a P pont távolságát úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk a pont és a síkban a ponthoz legközelebb eső M pont d távolságát. Az M pont az S sík és az S-re merőleges P ponton átmenő e egyenes metszéspontja.

1. lépés: Az S-re merőleges P-n átmenő e egyenes egyenletrendszerének meghatározása:

Mivel e merőleges S-re, e irányvektora megegyezik az S normálvektorával. Vagyis egy lehetséges egyenletrendszert kapunk:

$$x_1 = 0 + t \cdot 2$$
$$x_2 = -1 + t \cdot 1$$
$$x_3 = 0 + t \cdot 2.$$



4. ábra. két sík hajlásszöge.

2. lépés: Az S sík és az e egyenes M metészpontjának meghatározása.

M azon vektor végpontja mely kielégíti az egyenes egyenletrendszerét és a sík egyenletét is, ezért behelyettesítjük a sík egyenletéből az egyenes egyenletrendszeréből kapott értékeket és keressük azt a t_M paramétert, melyre $2 \cdot 2 \cdot t_M + t_M - 1 + 4t_M = 4$, vagyis $t_M = \frac{5}{9}$. Visszahelyettesítva az e egyenes egyenletrendszerébe kapjuk, hogy $M = (\frac{10}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{10}{9})$.

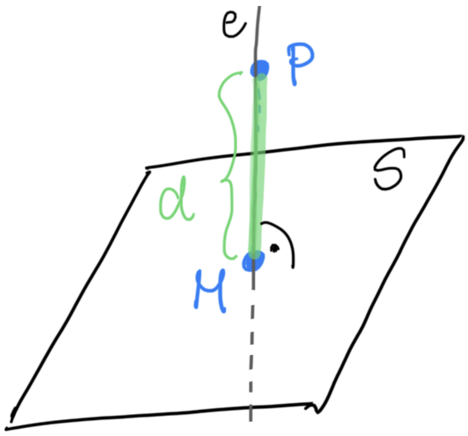
3. lépés: P és M távolsága.

A P és az M pont távolsága a $\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP} = \left(\frac{10}{9}, \frac{5}{9}, \frac{10}{9}\right)$ vektor hossza, vagyis $|\vec{PM}| = \frac{15}{9}$.

5. Feladat (Pont és egyenes távolsága): Adjuk meg az $P(1, 2, 1)$ pont és az $e : x = 4t, y = -t, z = 2t + 2$ egyenes távolságát.

Megoldás:

Lásd 6. ábra. Az e egyenes és a P pont távolsága a pont és az egyenesen a ponthoz legközelebbi M pont távolsága. Ha tudjuk az e egyenes egy Q pontját, akkor, mivel az MQP háromszög M pontjánál levő szög derékszög, a háromszög MP oldalának hosszát megkapjuk, mint a PQ oldal hossza és a Q pontnál fekvő szög szinuszának szorzata. Az e egyenes $\underline{v}$ irányvektora $\underline{v} = (4, -1, 2)$ és egy pontja a $Q(0, 0, 2)$ pont. A Q pontnál fekvő α szög a $\underline{v}$ irányvektor és $\vec{QP} = (1, 2, -1)$ vektorok által bezárt szög, melynek koszinuszát megkaphatjuk a skaláris szorzatból. $\cos\alpha = \frac{\vec{QP}\,\underline{v}}{|\vec{QP}||\underline{v}|} = \frac{0}{\sqrt{6}\sqrt{21}}$. Vagyis $M = Q$, tehát az egyenes és a pont keresett d távolsága egyenlő a $Q(0, 0, 2)$ és a $P(1, 2, 1)$ pont távolságával, ami a $\vec{QP}$ vektor hossza, vagyis $\sqrt(6)$.



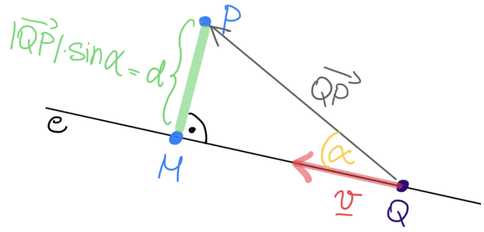
5. ábra. Sík és pont távolsága.

6. Feladat (Két sík metszeteként előálló egyenes egyenlete): Adjuk meg az $x - 2y + z = 12$ egyenlető S_1 és a $y + 2z = -6$ egyenletű S_2 sík metszeteként előálló e egyenes egyenletét.

Megoldás:

1. lépés: az irányvektor meghatározása.

Lásd: 7. ábra. Mivel az e egyenest mindkét sík tartalmazza ezért e irányvektora merőleges lesz az S_1 sík $\underline{n}_1$ és az S_2 sík $\underline{n}_2$ normálvektorára. Így a $\underline{v}$ irányvektort megkaphatjuk, mint az $\underline{n}_1$ és $\underline{n}_2$ vektoriális szorzata. Jelen esetben $\underline{v} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = (-5, -2, 1)$.



6. ábra. Pont és egyenes távolsága.

2. lépés: egy pont meghatározása.

Olyan pontot keresünk melyet S_1 és S_2 is tartalmaz. Vagyis egy olyan $P(p_1, p_2, p_3)$ pontot, melyre:

$$\begin{aligned} p_1 - 2p_2 + p_3 &= 12 \\ p_2 + 2p_3 &= -6. \end{aligned}$$

Rögzítsük p_1-t 0-nak, ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

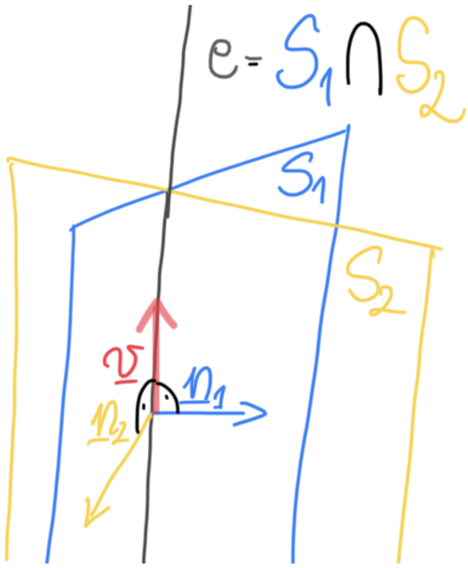
$$\begin{aligned} -2p_2 + p_3 &= 12 \\ p_2 + 2p_3 &= -6. \end{aligned}$$

melynek megoldása $p_2 = -6$, $p_3 = 0$, vagyis az egyenes egy pontja a $P(0, -6, 0)$.

3. lépés: az egyenletrendszer felírása.

Az e egyenes egy irányvektora $\underline{v} = (-5, -2, 1)$ és egy pontja $P(0, -6, 0)$, tehát egy egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5t \\ x_2 &= -6 - 2t \\ x_3 &= t. \end{aligned}$$



7. ábra. Síkok metszete.