Tartalomjegyzék

1. Algebrai alak

$$\mathbb{C} := \{z = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\} \text{ ahol } i^2 = -1$$

Ha $z = a + bi$, akkor az a-t a *valós*, a b-t az *imaginárius* vagy *képzetes* résznek nevezzük.

2. Műveletek

$z_1 = a_1 + ib_1$ és $z_2 = a_2 + ib_2$, ekkor

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

1. feladat
   Legyen $z_1 = 2 - i$ és $z_2 = 1 + 4i$.
   (a) $4z_1 + 6z_2^2 = ?$
   (b) $\frac{z_2}{z_1^2} = ?$

Megoldás:
(a) $4z_1 = 8 - 4i$, $z_2^2 = 1 + 2 \cdot 4i - 16$, $6z_2^2 = -90 + 48i$. Tehát: $4z_1 + 6z_2^2 = -82 + 44i$.
(b) $z_1^2 = 4 - 2 \cdot 2i - 1 = 3 - 4i$. Tehát: $\frac{z_2}{z_1^2} = \frac{(1+4i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = -\frac{13}{25} + \frac{16}{25}i$.

2. feladat
   (a) $i^{2022} = ?$
   (b) $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2022} = ?$

Megoldás:
(a)

$$i^{2022} = (i^2)^{1011} = (-1)^{1011} = -1$$

Megj.: Legyen $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$i^k = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ osztható 4-gyel.} \\ 1 \cdot i = i, & \text{ha } k-1 \text{ osztható 4-gyel.} \\ 1 \cdot i^2 = -1, & \text{ha } k-2 \text{ osztható 4-gyel.} \\ -1 \cdot i = i, & \text{ha } k-3 \text{ osztható 4-gyel.} \end{cases}$$

(b) Egy lehetséges megoldás, hogy négyesével csoportosítjuk az összeg tagjait a következő módon: $(1 + i^1 + i^2 + i^3) + (i^4 + i^5 + \ldots) + \cdots + (\cdots + i^{2019}) + i^{2020} + i^{2021} + i^{2022}$, ekkor minden csoportban az összeg nulla lesz (lásd a megjegyzést fentebb) és az összegből az $i^{2020} + i^{2021} + i^{2022}$ rész marad. Tehát

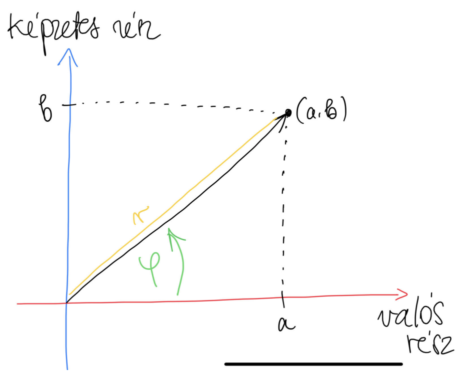
$$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2022} = i^{2020} + i^{2021} + i^{2022} = 1 + i - 1 = i$$

Megj.: próbáljatok találni egy másik megoldási módot.

3. Trigonometrikus alak

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor a lenti ábra alapján a kifejezhető, mint $r\cos\varphi$ és b, mint $r\sin\varphi$ ($r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$). A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r > 0$ alakot a z *trigonomerikus alak*jának nevezzük.

$Z = a + i\,b$



Trigonometrikus alakból algebrai alak.

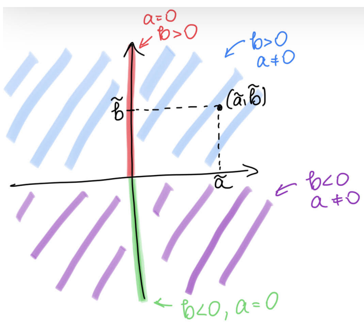
A fentiek alapján, ha $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és ismerjük r-t és φ-t, akkor

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

Algebrai alakból trigonometrikus alak.

Ha $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és ismerjük a-t és b-t, akkor (a színezéshez lásd a lenti ábrát)

$$r = \sqrt{(a^2+b^2)}, \quad \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0,\ b > 0 \\ \frac{3\pi}{4}, & \text{ha } a = 0,,\ b < 0 \\ \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), & \text{ha } a \neq 0,,b > 0 \\ \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \text{ha } a \neq 0,\ b < 0 \\ 0, & \text{ha } a > 0,\ b = 0 \\ \pi, & \text{ha } a < 0,\ b = 0. \end{cases}$$



Például, legyen $z_1 = a_1 + b_1 i = 3 + 3\sqrt{3}i$, $z_2 = a_2 + b_2 i = -3 + (-3\sqrt{3})i$. Ekkor $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \sqrt{3}$, DE a z_1 trigonometrikus alakja $6(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ és z_2 trigonometrikus alakja $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$.

3. feladat: Adjuk meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját.

   (a) $2\cdot\sqrt{3} + 2i$

   (b) $1 - i$

   (c) $-4i$

Megoldás:
(a) $r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4, \quad \text{arctg}\left(\frac{2}{2\cdot\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, mivel b>0, ezért $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Tehát $2\cdot\sqrt{3} + 2i = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
(b) $r = \sqrt{2}, \quad \text{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{3\pi}{4}$, de mivel $b < 0$, ezért $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Tehát $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$
(c) $r = 4, \varphi = \frac{3\pi}{2}$ Tehát $-4i = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

4. Hatványozás

Legyen $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ekkor $z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. Példa:

$$(1+\sqrt{3}i)^{10} = \left[2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{10} = 2^{10}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2^{10}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = -2^9 + i2^9\sqrt{3}$$

4. feladat: Írjuk le a megoldás algebrai alakját.

(a) $(1+i)^{15} =?$

(b) $(1-\sqrt{3}i)^8 =?$

Megoldás:
(a)

$$(1+i)^{15} = \left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right]^{15} = \sqrt{2}^{15}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}^{15}\left[\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{15\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}^{15}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] = 2^7(1-i)$$

(b)

$$(1-\sqrt{3}i)^8 = \left[2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^8 = 2^8\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2^8\left[\cos\left(\frac{40\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{40\pi}{3}\right)\right] = 2^8\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = 2^7(-1-\sqrt{3}i)$$

5. Gyökvonás

Ha $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sqrt[n]{z} = sqrt[n]r\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)\right),\ k\in\{0,\ldots,n-1\}.$$

Megj.: Vagyis a z komplex számnak n darab n-edik gyöke van.
Példa:

$$z_{1,2} = \sqrt{-2+2\sqrt{3}i}$$

1.lépés: $-2+2\sqrt{3}i$ trigonometrikus alakja

$$r = \sqrt{4+12} = 4,\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

2/i lépés: az első gyök ($k = 0$)

$$z_1 = \sqrt{4}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)\right] = 1 + \sqrt{3}i$$

2/ii lépés: a második gyök ($k = 1$)

$$z_2 = \sqrt{4}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = -1 - \sqrt{3}i$$

5. feladat: Mely $z \in \mathbb{C}$ számokra teljesül, hogy

(a) $z^4 + 16 = 0$

(b) $z^2 + 4z + 16 = 0$

Megoldás:

(a) Az egyletet átrendezve kapjuk, hogy:

$$z = \sqrt[4]{-16},$$

tehát 4 megoldást várunk: $z_{1,2,3,4}$-t.

1. lépés: $s = -16$ trigonometrikus alakja:

$$r = \sqrt{16} = 4,\ \varphi = \pi$$

2. lépés: a gyökök

$k = 0$ $z_1 = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}(1 + i)$

$k = 1$ $z_1 = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}(-1 + i)$

$k = 2$ $z_1 = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}(-1 - i)$

$k = 3$ $z_1 = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}(1 - i)$

(a)

A megoldást $w_{1,2}$-vel jelöljük, ezek a megoldóképlet alapján:

$$w_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-1}\sqrt{34}}{2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{34}}{2}$$